# Cap. 1 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória
aula 3

SIMO/MQDEE

MARIA CÂNDIDA MOURÃO

(cmourao@iseg.ulisboa.pt)

## Cap. 1 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

Cap. 1 – Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

- 1.1 Introdução
- 1.2 Relaxações
- 1.3 Resolução exata de problemas
  - Algoritmo de *branch-and-bound*
  - Algoritmo de planos de corte
- 1.4 Utilização de software

**Bibliografia**


- F.S. Hillier; G.J. Lieberman, Introduction to Operations Research, 9th ed., McGraw-Hill, 2009.
- L. Wolsey, Integer Programming, John Wiley & Sons, 1998.

## Cap. 1 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

https://www.informs.org/Explore/History-of-O.R.-Excellence/Biographical-Profiles/Hillier-Frederick-S

F. Hillier

https://www.informs.org/Explore/History-of-O.R.-Excellence/Biographical-Profiles/Lieberman-Gerald-J

Gerald J. Lieberman
1925 - 1999

https://www.informs.org/Explore/History-of-O.R.-Excellence/Biographical-Profiles/Wolsey-Laurence-A

L. Wolsey



## OTIMIZAÇÃO INTEIRA

### Aplicações

### Análise de Investimentos

Uma companhia tem um orçamento de b *u.m.* para investimentos no próximo ano e identificou $n$ projetos indivisíveis. Cada projeto $j$ proporciona, uma receita de $c_j$ e requer um investimento de $a_j$.

Formule o problema supondo que se pretende maximizar a receita total.

## OTIMIZAÇÃO INTEIRA

### Aplicações

#### Análise de Investimentos

Uma companhia tem um orçamento de b *u.m.* para investimentos no próximo ano e identificou $n$ projetos indivisíveis. Cada projeto $j$ proporciona, uma receita de $c_j$ e requer um investimento de $a_j$.

Formule o problema supondo que se pretende maximizar a receita total.

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j$$

$$\text{s.a:} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \\ x_j \in \{0,1\} \; j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Problema da mochila

✓ O problema da mochila é NP-difícil.



## OTIMIZAÇÃO INTEIRA

### Branch & Bound

- PLI de Minimização: $z^* = \text{Min}\{\mathbf{c}\,\mathbf{x}: \mathbf{x} \in S\}$ $(S \cap \mathbb{Z}^n \neq \emptyset)$

- Pretendemos "partir" o problema inicial em problemas mais fáceis de resolver e que nos levem à resolução do problema inicial!

- Decompondo $S$ em subconjuntos mais pequenos:

$$S = \bigcup_{k=1}^{K} S_k$$

e considerando $Z^k = \text{Min}\{\mathbf{cx}: \mathbf{x} \in S_k\}$

então, $Z^* = \min_k z^k$

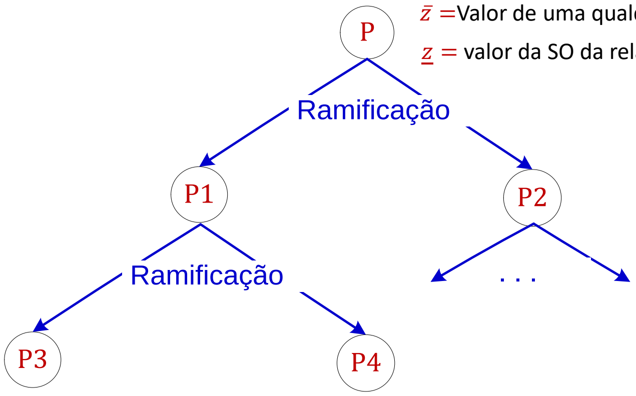
## OTIMIZAÇÃO INTEIRA

### Branch & Bound

- Partição do problema (Min) em subproblemas

$\bar{z}$ =Valor de uma qualquer SA

$\underline{z}$ = valor da SO da relaxação Linear

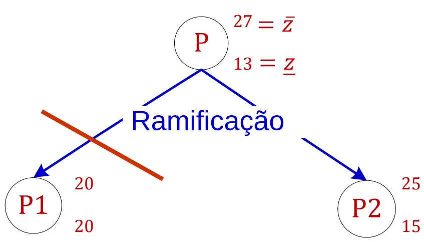


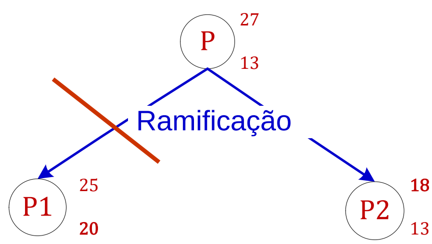



## OTIMIZAÇÃO INTEIRA

### Branch & Bound

- PLI de Minimização: Cancelamento de ramificação a partir de um nó




**i.** SO do subproblema

**ii.** Subproblema de valor nunca melhor que o de P2

**iii.** Subproblema impossível!

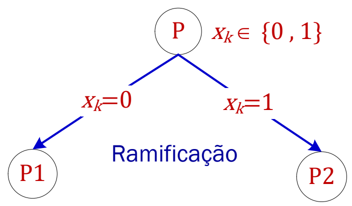
- Obtenção dos limites para os valores de cada subproblema:
  - Majorantes – SA primais
  - Minorantes – relaxações; dualidade

## Branch & Bound

### Questões:

- Como escolher os subconjuntos $S_k$?
- Qual a regra de partição/ramificação?
- A partir de cada nó devemos dividir a resolução em dois ou mais nós?
- Por que ordem se devem analisar os subproblemas em estudo?
- Quais as regras para obtenção de limites?

### Programação Binária:

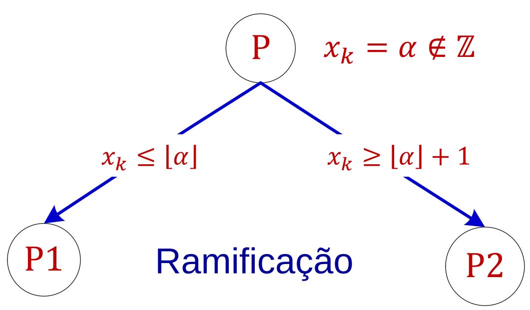







## Branch & Bound

### Programação Inteira:




$S_1 = S \cap \{\mathbf{x}\colon x_k \leq \lfloor \alpha \rfloor\}$ $\qquad$ $S_2 = S \cap \{\mathbf{x}\colon x_k \geq \lfloor \alpha \rfloor + 1\}$

- Graficamente - PLR

$$Min\ z = x_1 - 2x_2$$

s.a:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \quad\quad\ \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$



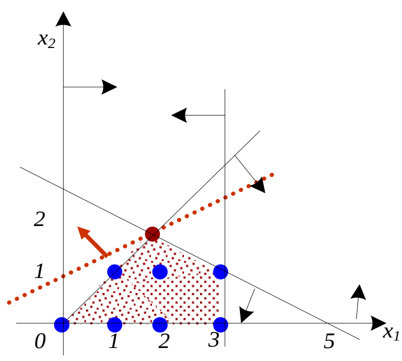


- Graficamente - PLR

$$Min\ z = x_1 - 2x_2$$

s.a:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \quad\quad\ \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$




$$\mathbf{x}_{RL} = (x_1^{RL}; x_2^{RL}) = \left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$$

$$\underline{z} = z_{RL} = -\frac{5}{3} \leq z^* \leq 0 = z(0{,}0)$$

# Otimização Inteira

## Branch & Bound

$\mathbf{x}_{RL} = \left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$

P $\quad \underline{z} = -\frac{5}{3} \leq z^* \leq 0 = \overline{z}$



# Otimização Inteira

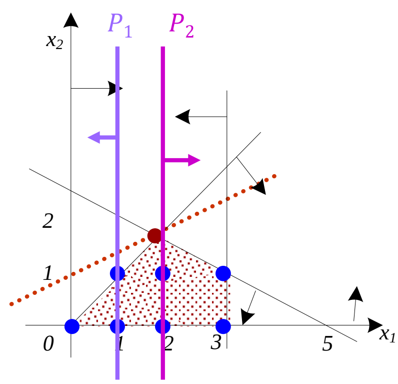
## Branch & Bound

$\mathbf{x}_{RL} = \left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$

P $\quad \underline{z} = -\frac{5}{3} \leq z^* \leq 0 = \overline{z}$

$x_1 \leq 1$ $\quad$ $x_1 \geq 2$

P1 $\quad$ Ramificação $\quad$ P2




$Min\ z = x_1 - 2x_2$

## Otimização Inteira

### Branch & Bound

P $\underline{z} = -\frac{5}{3} \leq z^* \leq 0 = \overline{z}$

$x_1 \leq 1$ $x_1 \geq 2$

P1 Ramificação P2



## Otimização Inteira

### Branch & Bound

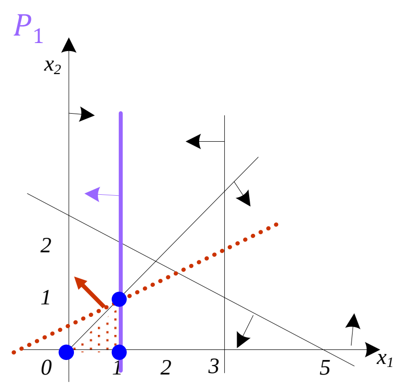
P $\underline{z} = -\frac{5}{3} \leq z^* \leq 0 = \overline{z}$

$x_1 \leq 1$ $x_1 \geq 2$

P1 Ramificação P2

$\mathbf{x} = (1;1)$

$z_1 = -1$




SA! Fim ⇨ atualização do majorante:

$$\overline{z} = z_1 = -1$$

## OTIMIZAÇÃO INTEIRA

### Branch & Bound

P $\underline{z} = -\frac{5}{3} \leq z^* \leq 0 = \overline{z}$

$x_1 \leq 1$ $x_1 \geq 2$

P1 Ramificação P2



## OTIMIZAÇÃO INTEIRA

### Branch & Bound

P $\underline{z} = -\frac{5}{3} \leq z^* \leq 0 = \overline{z}$

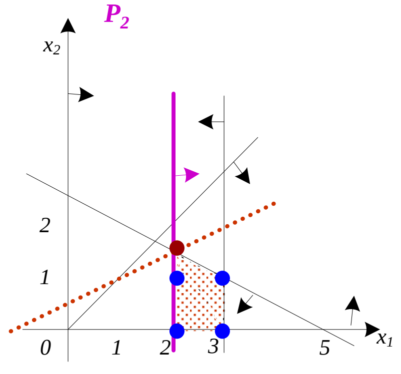
$x_1 \leq 1$ $x_1 \geq 2$

P1 Ramificação P2

$\mathbf{x} = \left(2; \frac{3}{2}\right)$

$z_2 = -1$

Fim ⇨ valor igual ao do majorante!



# Otimização Inteira

## Branch & Bound

**0.** Fazer: $P_0 \leftarrow PLR$ ; $S_0 \leftarrow S$ ; $ns \leftarrow 0$ {contador do número de subproblemas}

**1.** Resolver $P_0$

***Se*** a SO de $P_0$ é admissível de PLI, **FIM** (é também SO de PLI)

***c.c.*** criar a raiz da árvore com o subproblema $P_0$ e respetiva solução; $k \leftarrow 0$ {nº subproblema em análise}

**2. {Ramificação}** Ramificar $P_k$ em dois subproblemas:

Seja $x_r = \alpha \notin \mathbb{Z}$. Incluir na árvore os dois novos subproblemas por resolver:

$(P_{ns+1})$ $z_{ns+1} = Min\{\mathbf{cx}: \mathbf{x} \in S_{ns+1}\}$ com $S_{ns+1} = S_k \cap \{\mathbf{x}: x_r \leq \lfloor\alpha\rfloor\}$

$(P_{ns+2})$ $z_{ns+2} = Min\{\mathbf{cx}: \mathbf{x} \in S_{ns+2}\}$ com $S_{ns+2} = S_k \cap \{\mathbf{x}: x_r \geq \lfloor\alpha\rfloor + 1\}$

Fazer $ns \leftarrow ns + 2$

**3.** ***Se*** existirem subproblemas por resolver: resolver um qualquer desses subproblemas, seja $P_k$, ***Ir para* 4**

***c.c.*** **FIM** (SO: melhor SA encontrada)

**4. {Limitação}**

***Se*** $P_k$ é impossível ***ou*** tem valor ótimo $z_k \geq \overline{z}$ cancelar a pesquisa nesse ramo, ***Ir para* 3**

***c.c.,*** ***Se*** a SO de $P_k$ for SA do PLI cancelar a pesquisa nesse ramo e ***Ir para* 5**

***c.c.*** ***Ir para* 2**

**5.** ***Se*** $z_k < \overline{z}$ atualizar: $\overline{z} \leftarrow z_k$ e considerar a SO de $P_k$ como melhor SA

**6.** ***Se*** $\underline{z} = \overline{z}$ **FIM** (a S.O. é a solução com valor $\underline{z} = \overline{z}$)

***c.c.*** ***Ir para* 3**




# Otimização Inteira

## Branch & Bound


### Regras:

- Escolha da variável para a ramificação:
  - Variável de menor/maior índice
  - Variável mais fracionária:

    Sendo $f_j = x_j - \lfloor x_j \rfloor$

    escolher: $\arg\max_j \{\min(f_j; 1 - f_j)\}$

- Escolha do nodo para analisar (problema $P_k$):
  - *Depth-first*
  - Escolher o nó com o melhor valor de $z_k$ (valor mais baixo)

## OTIMIZAÇÃO INTEIRA

### Exercícios

3. Escrever o método de *branch and bound* (B&B) considerando o problema inicial de Maximização.

4. Resolva recorrendo ao B&B os seguintes exercícios:

a) $Max\ z = 5x_1 + 4x_2$

$$\text{s.a:} \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ x_1 - x_2 \leq 16 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ x_j \in \mathbb{Z}_0^+ \quad j = 1,2 \end{cases}$$

b) $Min\ z = 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5$

$$\text{s.a:} \begin{cases} x_2 - 5x_3 + x_4 + 2x_5 \geq -2 \\ 5x_1 - x_2 + x_5 \geq 7 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3 \text{ inteiros} \end{cases}$$

Solver



## OTIMIZAÇÃO INTEIRA

### Trabalho 2

A. Resolva o problema seguinte utilizando o *B&B* e ramificando escolhendo a variável mais fracionária :

$Max\ z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5$

$$\text{s.a:} \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 15 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 22 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 \leq 13 \\ x_j \in \mathbb{Z}_0^+ \quad j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

B. Suponha que ao resolver A. o critério de paragem era "resolver não mais de quatro subproblemas", e que ramificava escolhendo a variável de índice mais baixo. Que conclusão pode tirar? Enquadre o valor ótimo do problema utilizando os melhores valores possíveis para minorante e para majorante.

C. Formule e resolva recorrendo ao B&B o exercício 11.3-4 (pg. 525) do Hillier and Lieberman.